$$\Leftrightarrow \frac{1}{U_n+3} \le \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{U_n+3} \le \frac{2}{3}$$

Donc : $|W_{n+1}| \le \frac{2}{3}|W_n|. \forall n \in \mathbb{N}$

b/ Montrer le résultat par récurrence :

*/ $n=0 : |W_0| = |U_0 - 3| = |-2|$

$= 2 \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^0$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Donc le résultat est vrai pour $n=0$

*/ supposons que $|W_n| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

et montrons que $|W_{n+1}| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

En effet :

$|W_{n+1}| \le \frac{2}{3}|W_n|$ et $|W_n| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Donc $|W_{n+1}| \le \frac{2}{3} \times 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow |W_{n+1}| \le 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N} : |W_n| \le 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c/ $\lim\limits_{n \to +\infty} 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - 3) = 0$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3}$

Exercice 5

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a/ Montrons le résultat par récurrence :

i) pour $n=0$ on a : $1 < U_0 = \frac{3}{2} < 2$ Vrai

ii) supposons que : $1 < U_n < 2$

et montrons que : $1 < U_{n+1} < 2$

En effet :

$1 < U_n < 2 \Leftrightarrow 0 < U_n - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{U_n - 1} < 1$

$\Leftrightarrow 1 < 1 + \sqrt{U_n - 1} < 2$

Donc $1 < U_{n+1} < 2$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N} : 1 < U_n < 2$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} - U_n = 1 + \sqrt{U_n - 1} - U_n$

$= \sqrt{U_n - 1} - (U_n - 1)$

$= \sqrt{U_n - 1}\left(1 - \sqrt{U_n - 1}\right)$

On a : $U_n < 2 \Rightarrow U_n - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{U_n - 1} \le 1$

D'où $1 - \sqrt{U_n - 1} \ge 0$

et on sait que $\sqrt{U_n - 1} \ge 0$

D'où $\sqrt{U_n - 1}\left(1 - \sqrt{U_n - 1}\right) \ge 0$

et par suite $U_{n+1} - U_n \ge 0$

ce qui donne : (U_n) est une suite croissante.

c/ (U_n) est une suite croissante et majorée par 2 donc (U_n) est une suite convergente et elle converge vers $\ell \in [1,2]$.

On a aussi : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$

f est continue sur $[1, +\infty[$

et $[1,2] \subset [1, +\infty[$ d'où f est continue en ℓ

Conclusion : $f(\ell) = \ell$

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\ell - 1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell - 1} = \ell - 1$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = \ell^2 - 2\ell + 1 \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$

On a $a + b + c = 0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Comme (U_n) est croissante on a :

$U_n > U_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell \ge \frac{3}{2}$

Finalement $\ell = 2$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2}$

2) $V_n = \ln(U_n - 1)$

a/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - 1)$

$= \ln\left(1 + \sqrt{U_n - 1} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{U_n - 1} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(U_n - 1), \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{2}V_n$